ENS Cachan, Université Paris-Saclay

Extensions conservatives de la sémantique de Montague

M2 MPRI: Mars-Juillet 2017

Supervisé par Philippe de Groote, Loria, Nancy

Mathieu Huot

Plan

1. Introduction
2. Grammaires catégorielles abstraites
3. Résultats
4. Conclusion

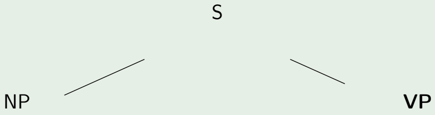
Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.

S

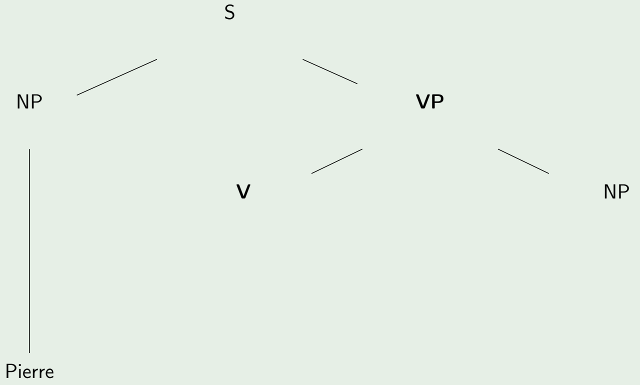
Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.



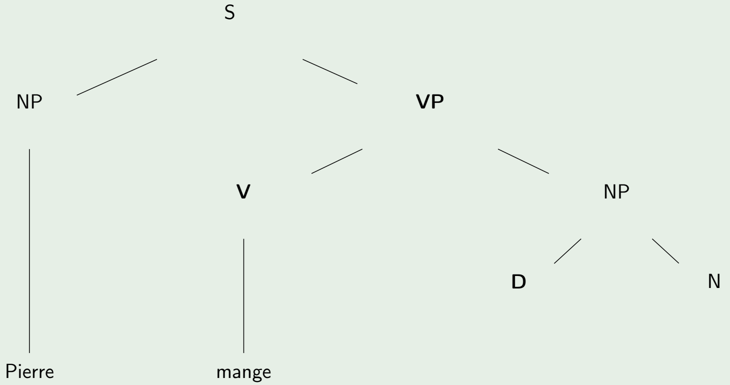
Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.



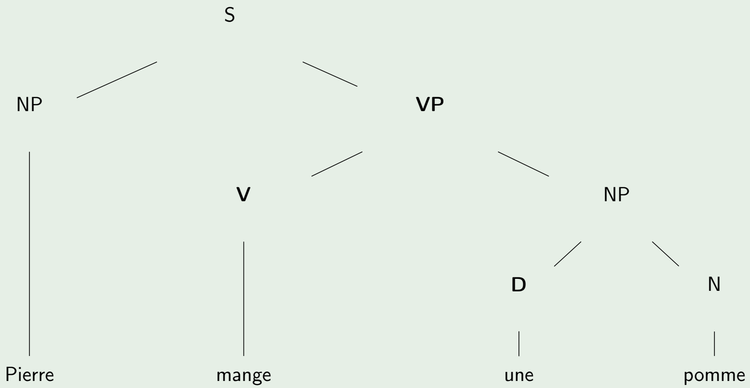
Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.



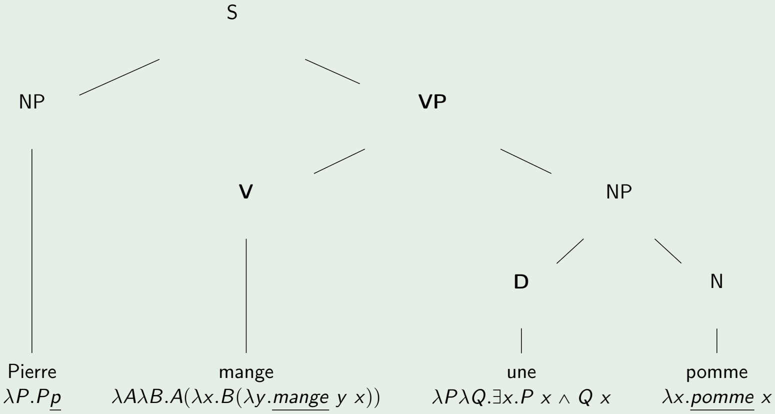
Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.



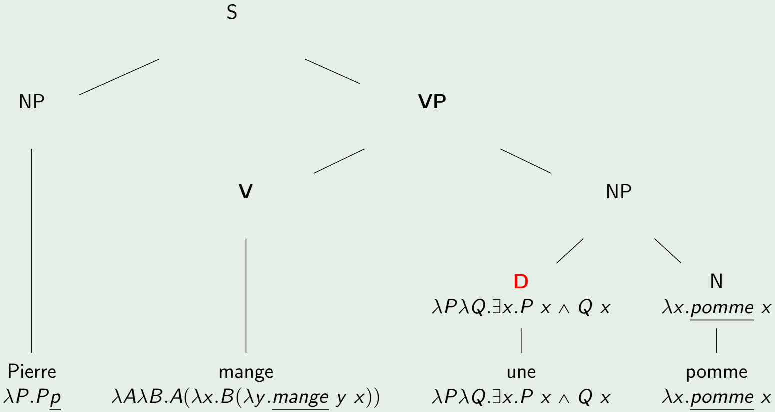
Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.



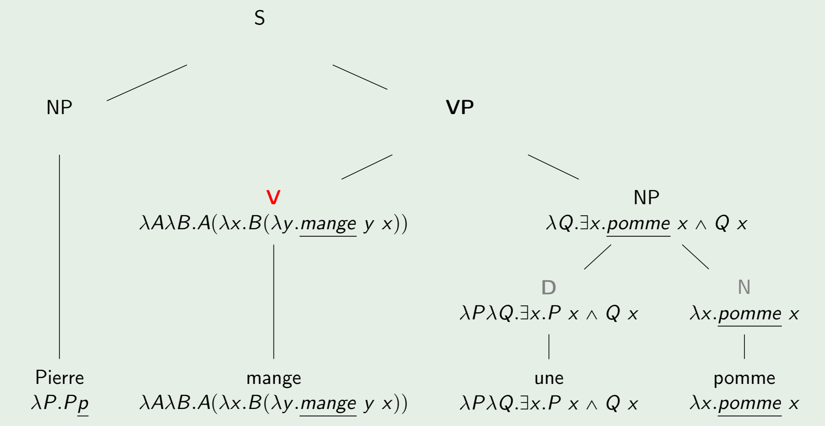
Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.



Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.



Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.

- S
  - NP $\lambda P.P\underline{p}$
    - Pierre $\lambda P.P\underline{p}$
  - **VP** $\lambda B.\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x)$
    - **V** $\lambda A \lambda B.A(\lambda x.B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x))$
      - mange $\lambda A \lambda B.A(\lambda x.B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x))$
    - NP $\lambda Q.\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge Q\ x$
      - **D** $\lambda P \lambda Q.\exists x.P\ x \wedge Q\ x$
        - une $\lambda P \lambda Q.\exists x.P\ x \wedge Q\ x$
      - N $\lambda x.\underline{pomme}\ x$
        - pomme $\lambda x.\underline{pomme}\ x$

Sémantique de Montague

Exemple 1 : Pierre mange une pomme.

- S: $\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge \underline{mange}\ \underline{p}\ x$
  - NP: $\lambda P.P\underline{p}$
    - Pierre: $\lambda P.P\underline{p}$
  - **VP**: $\lambda B.\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x)$
    - **V**: $\lambda A \lambda B.A(\lambda x.B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x))$
      - mange: $\lambda A \lambda B.A(\lambda x.B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x))$
    - NP: $\lambda Q.\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge Q\ x$
      - **D**: $\lambda P \lambda Q.\exists x.P\ x \wedge Q\ x$
        - une: $\lambda P \lambda Q.\exists x.P\ x \wedge Q\ x$
      - N: $\lambda x.\underline{pomme}\ x$
        - pomme: $\lambda x.\underline{pomme}\ x$

Limitation de la sémantique de Montague

Exemple 2 : problème d'intentionalité

Pierre voudrait manger une pomme.

Limitation de la sémantique de Montague

Exemple 2 : problème d'intentionalité

Pierre voudrait manger une pomme.

$\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge W_{\underline{p}}(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x)$

Limitation de la sémantique de Montague

Exemple 2 : problème d'intentionalité

Pierre voudrait manger une pomme.

$\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge W_{\underline{p}}(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x)$

Limitation de la sémantique de Montague

Exemple 2 : problème d'intentionalité

Pierre voudrait manger une pomme.

$\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge W_{\underline{p}}(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x)$

Limitation de la sémantique de Montague

Exemple 2 : problème d'intentionalité

Pierre voudrait manger une pomme.

$\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge W_{\underline{p}}(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x)$

Exemple 3 : problème de dynamicité

Je prends l'avion et je vais à Paris.

Je vais à Paris et je prends l'avion.

Limitation de la sémantique de Montague

Exemple 2 : problème d'intentionalité

Pierre voudrait manger une pomme.

$\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge W_{\underline{p}}(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x)$

Exemple 3 : problème de dynamicité

Je prends l'avion et je vais à Paris.

Je vais à Paris et je prends l'avion.

Problématique

Étendre de manière modulaire et correcte un modèle existant.

Grammaires catégorielles abstraites

Intuition

PIERRE : NP

UNE : $N \to NP$

MANGE : $NP \to NP \to S$

POMME : N

Grammaires catégorielles abstraites

Intuition

PIERRE : NP

UNE : $N \rightarrow NP$

MANGE : $NP \rightarrow NP \rightarrow S$

POMME : N

Définition (Signature $\langle A, C, \tau \rangle$)

- *A est un ensemble fini de types de base ;*
- *C est un ensemble fini de constantes ;*
- *$\tau : C \rightarrow \mathscr{T}(A)$ est une fonction de typage des constantes.*

Grammaires catégorielles abstraites

Définition (Lexique $\mathscr{L} = \langle F, G \rangle : \Sigma_1 \to \Sigma_2$)

- $F : A_1 \to \mathscr{T}(A_2)$ *est une fonction qui interprète les types de base de* Σ_1 *en types de* $\mathscr{T}(A_2)$ *;*
- $G : C_1 \to \Lambda(\Sigma_2)$ *est une fonction qui interprète les constantes de* Σ_1 *en* λ*-termes clos de* Σ_2 *;*
- *si* $\vdash_{\Sigma_1} t : \alpha$ *alors* $\vdash_{\Sigma_2} \mathscr{L}(t) : \mathscr{L}(\alpha)$.

Grammaires catégorielles abstraites

Définition (Lexique $\mathscr{L} = \langle F, G \rangle : \Sigma_1 \to \Sigma_2$)

- $F : A_1 \to \mathscr{T}(A_2)$ *est une fonction qui interprète les types de base de* Σ_1 *en types de* $\mathscr{T}(A_2)$;
- $G : C_1 \to \Lambda(\Sigma_2)$ *est une fonction qui interprète les constantes de* Σ_1 *en* λ*-termes clos de* Σ_2 ;
- *si* $\vdash_{\Sigma_1} t : \alpha$ *alors* $\vdash_{\Sigma_2} \mathscr{L}(t) : \mathscr{L}(\alpha)$.

Définition (ACG : de Groote 2001)

Une ACG est un quadruple $\langle \Sigma_1, \Sigma_2, \mathscr{L}, s \rangle$ *où :*

- Σ_1, Σ_2 *sont deux signatures* ;
- $\mathscr{L} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ *est un lexique* ;
- s *est un type désigné de* Σ_1.

Grammaires catégorielles abstraites

Définition (Lexique $\mathscr{L} = \langle F, G \rangle : \Sigma_1 \to \Sigma_2$)

- *$F : A_1 \to \mathscr{T}(A_2)$ est une fonction qui interprète les types de base de Σ_1 en types de $\mathscr{T}(A_2)$;*
- *$G : C_1 \to \Lambda(\Sigma_2)$ est une fonction qui interprète les constantes de Σ_1 en λ-termes clos de Σ_2 ;*
- *si $\vdash_{\Sigma_1} t : \alpha$ alors $\vdash_{\Sigma_2} \mathscr{L}(t) : \mathscr{L}(\alpha)$.*

Définition (ACG : de Groote 2001)

Une ACG est un quadruple $\langle \Sigma_1, \Sigma_2, \mathscr{L}, s \rangle$ où :

- *Σ_1, Σ_2 sont deux signatures ;*
- *$\mathscr{L} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ est un lexique ;*
- *s est un type désigné de Σ_1.*

Remarque

Le λ-calcul des ACG est linéaire.

Exemple d'ACG

Exemple d'ACG : Pierre mange une pomme.

Constantes abstraites et types	$\xmapsto{\mathscr{L}}$ Interpretations
S	t
N	$e \to t$
NP	$(e \to t) \to t$

Exemple d'ACG

Exemple d'ACG : Pierre mange une pomme.

Constantes abstraites et types	$\xmapsto{\mathscr{L}}$	Interpretations
S		t
N		$e \to t$
NP		$(e \to t) \to t$
$C_{pierre} : NP$		$\lambda Q.\ Q\ \underline{pierre}$
$C_{mange} : NP \to NP \to S$		$\lambda A.\lambda B.\ A(\lambda x.B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x))$
$C_{une} : N \to NP$		$\lambda P\ Q.\ \exists x.\ P\ x \wedge Q\ x$
$C_{pomme} : N$		$\lambda x.\ \underline{pomme}\ x$

Exemple d'ACG

Exemple d'ACG : Pierre mange une pomme.

Constantes abstraites et types $\xmapsto{\mathscr{L}}$	Interpretations
S	t
N	$e \to t$
NP	$(e \to t) \to t$
$C_{pierre} : NP$	$\lambda Q.\, Q\ \underline{pierre}$
$C_{mange} : NP \to NP \to S$	$\lambda A.\, \lambda B.\, A(\lambda x.B(\lambda y.\underline{mange}\ y\ x))$
$C_{une} : N \to NP$	$\lambda P\, Q.\, \exists x.\, P\ x \wedge Q\ x$
$C_{pomme} : N$	$\lambda x.\, \underline{pomme}\ x$

Terme abstrait	Interpretation
$C_{mange}\ C_{Pierre}\ (C_{une}\ C_{pomme})\ : S$	$\exists x.\underline{pomme}\ x \wedge \underline{mange}\ \underline{pierre}\ x\ : t$

Extensions conservatives

Intuition

Étendre le lexique d'une ACG pour traiter d'un nouveau phénomène linguistique de façon conservative, c'est à dire tel que l'ancienne interpretation est vraie si et seulement si la nouvelle l'est.

Extensions conservatives

Intuition

Étendre le lexique d'une ACG pour traiter d'un nouveau phénomène linguistique de façon conservative, c'est à dire tel que l'ancienne interpretation est vraie si et seulement si la nouvelle l'est.

Exemple : intentionalisation

- mondes possibles : ensemble w et constante $\mathrm{i} : w$;
- $\Sigma_0 = \langle \{e, t\}, C_0, \tau_0 \rangle$;
- $C_r \subset C_0$ constantes ne dépendant pas des mondes possibles ;
- $\Sigma_1 = \langle \{e, t, s\}, C_0 \bigcup \{\mathrm{i}\}, \tau_1 \rangle$;
- $\Sigma_2 = \langle \{e, t, s\}, C_0, \tau_2 \rangle$;

Extensions conservatives

Exemple : intentionalisation

lexique $(-)^* : \Sigma_0 \to \Sigma_1$

$$e^* = e$$

$$t^* = t$$

$$\tau_1(c) = \begin{cases} w & \text{si } c = \mathrm{i} \\ \tau_0(c) & \text{si } c \in C_r \\ (w \to \tau_0(c)) & \text{si } c \notin C_r \end{cases}$$

$$c^* = \begin{cases} c & \text{if } c \in C_r \\ (c\ \mathrm{i}) & \text{if } c \notin C_r \end{cases}$$

Extensions conservatives

Exemple : intentionalisation

lexique $(-)^* : \Sigma_0 \to \Sigma_1$

$$e^* = e$$
$$t^* = t$$

$$\tau_1(c) = \begin{cases} w & \text{si } c = \mathrm{i} \\ \tau_0(c) & \text{si } c \in C_r \\ (w \to \tau_0(c)) & \text{si } c \notin C_r \end{cases}$$

$$c^* = \begin{cases} c & \text{if } c \in C_r \\ (c\ \mathrm{i}) & \text{if } c \notin C_r \end{cases}$$

lexique $(\bar{-}) : \Sigma_0 \to \Sigma_2$

$$\bar{e} = s \to e$$
$$\bar{t} = s \to t$$
$$\bar{c} = \mathbb{E}_{\tau_0(c)}(Uc^*)$$

$$\tau_2(c) = \begin{cases} \tau_0(c) & \text{si } c \in C_r \\ (w \to \tau_0(c)) & \text{si } c \notin C_r \end{cases}$$

Extensions conservatives

Exemple : intentionalisation

lexique $(-)^* : \Sigma_0 \to \Sigma_1$

$$e^* = e$$

$$t^* = t$$

$$\tau_1(c) = \begin{cases} w & \text{si } c = \mathrm{i} \\ \tau_0(c) & \text{si } c \in C_r \\ (w \to \tau_0(c)) & \text{si } c \notin C_r \end{cases}$$

$$c^* = \begin{cases} c & \text{if } c \in C_r \\ (c\ \mathrm{i}) & \text{if } c \notin C_r \end{cases}$$

lexique $(\bar{-}) : \Sigma_0 \to \Sigma_2$

$$\bar{e} = s \to e$$

$$\bar{t} = s \to t$$

$$\bar{c} = \mathbb{E}_{\tau_0(c)}(Uc^*)$$

$$\tau_2(c) = \begin{cases} \tau_0(c) & \text{si } c \in C_r \\ (w \to \tau_0(c)) & \text{si } c \notin C_r \end{cases}$$

Extensions conservatives

Théorème (de Groote 2015)

Il existe une construction générale permettant de construire des extensions conservatives.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma_0 \arrow[dl, "\mathscr{L}_1"'] \arrow[dr, "\mathscr{L}_2 = \mathbb{E}(\mathscr{L}_1)"] & \\
\Sigma_1 & & \Sigma_2
\end{tikzcd}
$$

Cas particuliers : intentionalisation, dynamisation. □

Extensions conservatives

Théorème (de Groote 2015)

Il existe une construction générale permettant de construire des extensions conservatives.

$$\begin{tikzcd} & \Sigma_0 \arrow[dl, "\mathscr{L}_1"'] \arrow[dr, "\mathscr{L}_2 = \mathbb{E}(\mathscr{L}_1)"] & \\ \Sigma_1 & & \Sigma_2 \end{tikzcd}$$

Cas particuliers : intentionalisation, dynamisation. □

Objectifs

- Trouver un cadre mathématique plus général pour étudier les extensions conservatives ;
- Traiter d'autres exemples de la littérature.

Catégories

Définition (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en :

- *une collection $\mathcal{C}_0$ d'objets ;*
- *une collection $\mathcal{C}_1$ de flèches (morphismes) ;*
- *deux fonctions source et but $s, t : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$;*
- *une fonction partielle $\circ : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$ de composition des flèches ;*
- *une fonction id $: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$*

satisfiant plusieurs axiomes.

Exemples de catégories

- Ensembles et fonctions ;
- Espaces vectoriels et applications linéaires.

Exemples de catégories

- Ensembles et fonctions ;
- Espaces vectoriels et applications linéaires.

Observation générale

Morphisme $\cong$ fonction qui préserve la structure.

Exemples de catégories

- Ensembles et fonctions ;
- Espaces vectoriels et applications linéaires.

Observation générale

Morphisme $\cong$ fonction qui préserve la structure.

ACG

Les ACG forment une catégorie.

Modèles du λ-calcul

Définition (Catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$)

- $\forall a, b \in \mathcal{C}, a \times b, a \Rightarrow b \in \mathcal{C}$;

Modèles du λ-calcul

Définition (Catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$)

- $\forall a, b \in \mathcal{C}, a \times b, a \Rightarrow b \in \mathcal{C}$;
- $\Delta_a : a \to a \times a, \pi_1 : a \times b \to a, \pi_2 : a \times b \to b \in \mathcal{C}$;

Modèles du λ-calcul

Définition (Catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$)

- $\forall a, b \in \mathcal{C}, a \times b, a \Rightarrow b \in \mathcal{C}$;
- $\Delta_a : a \to a \times a, \pi_1 : a \times b \to a, \pi_2 : a \times b \to b \in \mathcal{C}$;
- $$\begin{tikzcd} a \times (a \Rightarrow c) \arrow[dr, "ev_{a,c}"] & \\ a \times b \arrow[u, "Id_a \times \Lambda(f)"] \arrow[r, "\forall f"'] & c \end{tikzcd}$$

satisfaisant plusieurs axiomes.

Modèles du λ-calcul

Définition (Catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$)

- $\forall a, b \in \mathcal{C}, a \times b, a \Rightarrow b \in \mathcal{C}$;
- $\Delta_a : a \to a \times a, \pi_1 : a \times b \to a, \pi_2 : a \times b \to b \in \mathcal{C}$;
- $$\begin{tikzcd} a \times (a \Rightarrow c) \arrow[dr, "ev_{a,c}"] & \\ a \times b \arrow[u, "Id_a \times \Lambda(f)"] \arrow[r, "\forall f"'] & c \end{tikzcd}$$

satisfaisant plusieurs axiomes.

Théorème (Lambek)

Toute CCC a pour langage interne un λ-calcul simplement typé et tout λ-calcul simplement typé a un modèle donné par une CCC.

Modèles du λ-calcul

Définition (Catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$)

- $\forall a, b \in \mathcal{C}, a \times b, a \Rightarrow b \in \mathcal{C}$;
- $\Delta_a : a \to a \times a, \pi_1 : a \times b \to a, \pi_2 : a \times b \to b \in \mathcal{C}$;
- $$\begin{tikzcd} a \times (a \Rightarrow c) \arrow[dr, "ev_{a,c}"] & \\ a \times b \arrow[u, "Id_a \times \Lambda(f)"] \arrow[r, "\forall f"'] & c \end{tikzcd}$$

satisfaisant plusieurs axiomes.

Théorème (Lambek)

Toute CCC a pour langage interne un λ-calcul simplement typé et tout λ-calcul simplement typé a un modèle donné par une CCC.

$$\Gamma \vdash t : A \longleftrightarrow \Gamma \xrightarrow{t} A$$

□

ACG revisitées

Définition (ACG)

Une ACG est un triplet $\langle \mathcal{C}, \mathscr{L}, \mathcal{D} \rangle$ *où :*

- $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *sont des CCC ;*
- $\mathscr{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *est un foncteur préservant la structure de CCC.*

Exemple

- $\mathcal{C}$ librement engendrée par n, np, s et des constantes ;
- $\mathcal{D}$ librement engendrée par e, t et des constantes ;
- $\mathscr{L}$ est un lexique qui envoie n sur $e \to t$, s sur t, etc.

Extensions conservatives

Définition

Étant donnés deux lexiques $\mathscr{L}_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \mathscr{L}_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$, $\mathscr{L}_2$ *est une extension conservative de* $\mathscr{L}_1$ *s'il existe un foncteur* $U : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ *tel que le triangle suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl, "\mathscr{L}_1"'] \arrow[dr, "\mathscr{L}_2"] & \\ \mathcal{D} & & \mathcal{D}' \arrow[ll, "U"] \end{tikzcd}$$

Extensions conservatives

Définition

Étant donnés deux lexiques $\mathscr{L}_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \mathscr{L}_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$, $\mathscr{L}_2$ est une extension conservative de $\mathscr{L}_1$ s'il existe un foncteur $U : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ tel que le triangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl, "\mathscr{L}_1"'] \arrow[dr, "\mathscr{L}_2"] & \\ \mathcal{D} & & \mathcal{D}' \arrow[ll, "U"] \end{tikzcd}$$

Théorème

Il existe une construction générale permettant de construire des extensions conservatives. □

Extensions conservatives

Exemple : intentionalisation

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[dl, "\mathscr{L}_1"'] \arrow[dr, "\mathscr{L}_2"] & \\
\mathcal{D}[\mathrm{i}] \arrow[rr, "\cong"] & & \mathcal{D}_T
\end{tikzcd}$$

Extensions conservatives

Exemple : intentionalisation

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[dl, "\mathscr{L}_1"'] \arrow[dr, "\mathscr{L}_2"] & \\
\mathcal{D}[\mathrm{i}] \arrow[rr, "\cong"] & & \mathcal{D}_T
\end{tikzcd}
$$

$$\Gamma \vdash t : A \longmapsto \Gamma \vdash \lambda s.t[\mathrm{i} := s] : S \Rightarrow A$$

$$\Gamma \vdash t\mathrm{i} : A \longleftarrow\!\!\shortmid \Gamma \vdash t : S \Rightarrow A$$

Conclusion

Résumé

Cadre général unifié pour étudier les propriétés de conservativité.

Conclusion

Résumé

Cadre général unifié pour étudier les propriétés de conservativité.

Ajouts techniques

- linéarité
- complexité

Conclusion

Résumé

Cadre général unifié pour étudier les propriétés de conservativité.

Ajouts techniques

- linéarité
- complexité

Expressivité

- modèles distributionnels
- sous-typage
- autres exemples

Conclusion

Futurs travaux possibles

- ajout de probabilités ;
- formalismes encodés par ACG dans ce cadre ;
- remplacer CCC par topos.